Een uitnodiging tot samenwerken

Leen Stougie

In een project over computational biology met Gunnar Klau en Stefan Canzar, kwam ik het volgende probleem tegen. Aangezien jij de groep Life Sciences op het CWI hebt neergezet, en specifiek de algoritmische kant daarvan, mag je je een beetje verantwoordelijk voor dit probleem voelen.

Gegeven zijn een graaf $G = (V, E)$ met gewichten op de knopen $w : V \to \mathbb{R}$ (zowel positief als negatief) en een constante C. Bestaat er een partitie van de graaf in ten hoogste k samenhangende componenten, zodanig dat de som over de componenten van de absolute waarde van het totale gewicht van de knopen per component ten hoogste C is?

Wat is de complexiteit van dit probleem? Is het NP-volledig? Het is lang geleden dat ik me met zo'n vraag zonder aarzeling tot jou zou hebben gewend. Als het al bekend was zou jij dat geweten hebben, of je zou met iemand contact opnemen die het zou kunnen weten, of, als beide opties niet opgaan, zou je het antwoord zelf snel vinden, vooral als het probleem NP-volledig zou blijken te zijn. Jij was de meester van de reductie.

Naast het feit dat je recent geen onderzoek gedaan hebt, tenzij in het geheim, 's nachts in bed, en dan weinig succesvol, heb ik de laatste jaren een alternatief orakel gevonden in Google. Helaas leverde dat voor het bovenstaande probleem niets op. We hebben zelf een bewijs voor NP-volledigheid gevonden via een reductie van EXACT COVER BY 3-SETS. De grafen die in de reductie ontstaan hebben cykels. Nu willen we ook weten wat de complexiteit is van ons probleem indien de graaf een boom is. Dit zou wel eens efficiënt oplosbaar kunnen zijn. Aangezien je terugtreedt als directeur en ik niet gehoord heb of er al direct een volgende klus op je ligt te wachten, bestaat er een mogelijkheid dat we ons met dit soort vragen weer tot jou kunnen wenden.

Het biologische probleem achter dit fraaie graaf-partitie probleem heeft enige gelijkenis met het TEST COVER PROBLEEM. Voor het TEST COVER PROBLEEM heb je me beloofd je definitieve pensionering uit te stellen en het artikel over de Branch-and-Bound algoritmen te schrijven, waarvoor we de basis in 1984 gelegd hebben.

Het zou echt heel fraai zijn als je weer terug zou kunnen keren in het onderzoek. We hebben net MAPSP achter de rug en velen daar zullen je van harte welkom terug thuis wensen. Combinatorische optimalisering is nog steeds een gebied met heel veel vragen. Essentieel inzicht ontbreekt nog steeds, en niet alleen met betrekking tot de P versus NP vraag. Er bestaan veel trucs die toegepast kunnen worden, maar bijna zonder uitzondering ontbreken voldoende voorwaarden voor toepasbaarheid. Het lijkt erop dat iedere stap voorwaarts slechts bestaat uit het oplossen van een probleem en op zijn best een nieuw stuk gereedschap aan het arsenaal toevoegt waarmee toekomstige problemen te lijf gegaan kunnen worden. Ik zal aan de hand van een recent onderzoekssucces, waar ik zelf bij betrokken ben, aangeven wat ik hiermee bedoel, daarmee een beetje bijdragend aan wetenschappelijke inhoud van dit vriendenboek.

Onlangs [1] ben ik, samen met Sylvia Boyd, René Sitters, je wettelijke wetenschappelijke zoon, en Suzanne van der Ster, je toekomstige wetenschappelijke kleindochter, zo gelukkig geweest om een flinke duw te geven tegen het onderzoek naar een verbetering van het resultaat van Christofides voor het METRISCH-TSP, ook wel Δ-TSPgenoemd. De grens op de approximatie-ratio van 3/2 voor dit prachtige algoritme uit 1976 is nog steeds het beste dat bestaat voor polynomiale tijd algoritmen. Iedereen is er van overtuigd dat een betere benaderbaarheid mogelijk zou moeten zijn, maar 35 jaar onderzoek heeft tot nu toe niets opgeleverd.

Recent is deze grens verbroken voor wat algemeen als een belangrijke deelklasse van METRISCH-TSP wordt gezien. Het betreft de GRAAF-TSP, waarbij de afstand tussen twee knopen gegeven wordt door het aantal kanten op het kortste pad er tussen. Deze deelverzameling van METRISCH-TSP instanties bevat alle traditionele, klaslokaal, slechtste gevallen voor Christofides' algoritme. In 2010, hebben wij ratio's 4/3 en 7/5 weten te bereiken voor GRAAF-TSP beperkt tot respectievelijk kubieke grafen en grafen van graad ten hoogste 3 (merk op dat ook deze verdere beperking de traditionele slechtste gevallen voor Christofides bevat). In het begin van dit jaar, 2011, was er een ϵ van de ratio 3/2 afgesnoept [2] voor algemene GRAAF-TSP. In het voorjaar is, deels gebaseerd op ideeën uit ons artikel, de grens naar 1.461 gebracht [3]. Ons artikel is inmiddels verschenen in de proceedings van IPCO 2011. Laatstgenoemd artikel wordt, met kans 1, geselecteerd voor FOCS. En ik voorspel dat voor het eind van 2011 de 4/3 voor GRAAF-TSP zal zijn bereikt. Dit is opwindend onderzoek in de combinatorische optimalisering!

Zo zeker als de acceptatie [3] voor FOCS zal zijn, zo zeker zal dit onderzoek geen wiskundig inzicht verschaffen dat het oplossen van combinatorische optimaliseringsproblemen in de praktijk wezenlijk zal vergemakkelijken. In het beste geval levert het een nieuw inzicht om ook approximatie-ratio's voor andere problemen te verbeteren. Voor de vooruitgang van het vakgebied Operations Research zal het, zeker op korte termijn, slechts van beperkte waarde blijven. Daarvoor zou het veel interessanter zijn om erachter te komen in welke situaties technieken als simulated annealing, genetische algoritmen, die jij in het verleden aanduidde als homeopatische algoritmen, gebruikt kunnen worden. Er is tot nu toe amper enige structuur in combinatorische optimaliseringsproblemen ontdekt die antwoorden op dergelijke vragen binnen handbereik brengt.

De meest interessante vraagstukken binnen de OR liggen dus nog wijd open en zij zouden een enorme uitdaging moeten vormen voor onderzoekers die het zich kunnen permitteren om slechts spaarzaam resultaten te krijgen. Jij hebt nu deze status bereikt. Ik zal je over een jaar of 10 volgen. In een bijdrage aan het vriendenboek ter gelegenheid van je 60ste verjaardag heb ik benadrukt hoe belangrijk je in een vroeger deel van mijn leven bent geweest. Het zou me verheugen als we op wat gelijkwaardiger niveau een rol in de rest van elkanders leven kunnen spelen.

Referenties

[1] S. Boyd, R. Sitters, S. van der Ster, and L. Stougie, TSP on cubic and subcubic graphs, in: *Proc. of the 15th Conference on Integer Programming and Combinatorial Optimization (IPCO)*, 2011.

[2] S.O. Gharan and A. Saberi and M. Singh: A Randomized Rounding Approach to the Traveling Salesman Problem, *manuscript*, 2011.

[3] T. Mömke and O. Svensson: Approximating graphic TSP by matchings, *manuscript*, 2011.